Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Fuchs, Lazarus** (1833–1902)

Titel: **Ueber die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Determinantentheorie**

Quelle: Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik : Originalberichte der Verfasser.
Band 1 (1877),
Seite 1 – 9.

Selbstrezension Lazarus Fuchs' zu seinem Aufsatz:

Ueber die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Determinantentheorie
In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. - 81 (1876), S. 97-142

1877 gründete Leo Koenigsberger gemeinsam mit Gustav Zeuner die Zeitschrift *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik*, die Mathematikern die Möglichkeit bot, ihre neuen Publikationen in Eigenreferaten vorzustellen.

L. Fuchs: Ueber die linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie.

(Borchardt's Journal Band 81 S. 97 sqq.)

1.

Es sei

$$(A) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welcher eine Wurzel u der irreductiblen algebraischen Gleichung:

$$(1) \qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_1 u + A_0 = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, genügt, so genügen ihr die sämmtlichen Wurzeln derselben Gleichung (S. S. 100).

Besitzt die Gleichung (1) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient nicht für jedes z constant ist, so bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, d. h. jedes Integral der Differenzialgleichung hat die Form $c_1 u_1 + c_2 u_2$, wo c_1, c_2 constant sind (s. die Abhandlung des Verfassers im 66. Bande des Borchardt'schen Journals No. 2*). Hieraus ergiebt sich, dass in diesem Falle die sämmtlichen Integrale der Differenzialgleichung algebraisch sind (S. S. 100).

Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1) für jedes z constant, so hat sie die Form:

$$(1a) \qquad A_m u^m + A_0 = 0,$$

und die Differenzialgleichung wird durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt. — Dieser Satz wird (S. 100—101) aus einem allgemeineren auf S. 99 bewiesenen hergeleitet, welcher folgendermassen lautet: Besitzt die irreductible Gleichung (1) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

---

*) Es sollen im Folgenden die Arbeiten des Verfassers im Borchardt'schen Journal einfacher durch blosse Angabe des Bandes, in welchem sie enthalten sind, bezeichnet werden.

Hiernach sind also, wenn die Differenzialgleichung (A) algebraische Integrale besitzt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Sie wird durch die Wurzel φ einer rationalen Funktion befriedigt. In diesem Falle ist es *möglich aber nicht nothwendig*, dass die Differenzialgleichung (A) noch ausserdem ein algebraisches Integral ψ besitzt, ohne dass $\frac{\psi}{\varphi}$ constant ist, dass also der Differenzialgleichung nur algebraische Integrale genügen. Tritt dieses ein, so hat die Differenzialgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen, welches aus zwei verschiedenen Wurzeln rationaler Functionen besteht*).

2) Die Differenzialgleichung wird durch die Wurzeln einer irreductiblen algebraischen Gleichung befriedigt, von denen mindestens der Quotient zweier nicht für jedes z constant. In diesem Falle sind die sämmtlichen Integrale algebraisch.

Der mit 1) bezeichnete Fall ist leicht zu erledigen nach einem für lineare Differenzialgleichungen einer *beliebigen Ordnung* gültigen Verfahren. Sind nämlich $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\varrho$ die sämmtlichen singulären Punkte einer solchen Differenzialgleichung, so hat eine ihr genügende Wurzel einer rationalen Funktion die Form:

$$u = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \cdots (z - a_\varrho)^{\alpha_\varrho} g(z) ,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet (S. 101). Es werden zunächst (S. 102) gewisse algebraische

---

*) Man erkennt dieses am einfachsten folgendermassen:

Nach (B. 66 No. 4) hat ψ in der Umgebung eines singulären Punktes a der Differenzialgleichung die Form

$$\psi = c_1 \varphi + c_2 (z - a)^\lambda \chi(z) , \tag{1}$$

wo c_1 und c_2 Constanten und $\chi(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe darstellt, welche für $z = a$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass $\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a mit einer Potenz von $z - a$ multiplicirt eindeutig wird. Da diese Function algebraisch und für alle übrigen endlichen Werthe von z eindeutig ist, so ist sie Wurzel einer rationalen Funktion. Bezeichnen wir dieselbe mit t, so ergiebt sich aus einem Satze von Abel (vergl. Liouville journal de l'école polytech. cah. 22 p. 131), dass

$$\frac{\psi}{\varphi} = \int t\,dz = \beta t + C ,$$

wo β eine rationale Funktion und C eine Constante bedeutet. Demnach ist

$$\psi = \beta \varphi t + C\varphi . \tag{2}$$

Gleichungen rationale Wurzeln besitzen müssen, welche die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot \alpha_\varrho$ liefern. Alsdann hat ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zuzulassen, welche die Werthe der Coefficienten von $g(z)$ gewähren.

2.

Bei der Behandlung des Falles 2) voriger Num. ist es zweckmässig die Differenzialgleichung (A) durch die Substitution

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} . y$$

in eine Differenzialgleichung

$$(B) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

zu verwandeln. Der Untersuchung werden gewisse aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differenzialgleichung (B) y_1, y_2 gebildete Formen zu Grunde gelegt. Es sei nämlich η ein algebraisches Integral dieser Differen ialgleichung, welches einer irreductiblen Gleichung

$$(1) \qquad A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdot\cdot + A_0 = 0$$

mit rationalen Coefficienten genügt. Unter den Wurzeln derselben seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \cdot\cdot, \eta_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient zweier derselben für jedes z constant ist, so wird ihre Gesammtheit (S. 111) als das *reducirte Wurzelsystem der Gleichung* (1) bezeichnet.

Das Product

$$\Pi = \eta\eta_1\eta_2 \cdots, \eta_{n-1}$$

ist eine algebraische Funktion, welche für jeden Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, d. h. Wurzel einer rationalen Funktion (S. 114). Andererseits ist η_i als Integral der Differenzialgleichung (B) der Form $c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2$, wenn c_{i1}, c_{i2} Constanten bezeichnen. Demnach ist $\Pi = f(y_1, y_2)$ eine aus y_1, y_2 gebildete Form n^{ten} Grades. — Während also in dem Falle, dass die Differenzialgleichung (B) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine lineare Form $c_1y_1 + c_2y_2$ gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, so sind in dem allgemeineren Falle, so fern die Differenzialgleichung nur algebraische Integrale hat, Formen höheren Grades gleich Wurzeln rationaler Functionen. — Der niedrigste Grad einer Form dieser Art werde mit N bezeichnet (S. 116). Es wird nachgewiesen (S. S. 123 Satz II), dass *die Zahl*

N niemals grösser als zwölf, und weiter (S. S. 126), dass sie eine gerade Zahl sei.

Bezeichnen wir den Complex aller Formen, welche Wurzeln rationaler Functionen aequivalent sind, mit Φ, so zeichnen sich unter diesen diejenigen aus, welche nur die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung als Factoren enthalten, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Glieder alle und jeden zur ersten Potenz. Dieselben werden *Primformen* genannt (S. 114). Jede Form des Complexes Φ lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen (S. 115). Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Primform (S. 116).

3.

Nach Ermittelung der eben angegebenen oberen Grenze für die Zahl N werden im Wesentlichen zwei Methoden angewendet, um über die Frage zu entscheiden, ob die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale habe oder nicht.

I. Methode.

Eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differenzialgleichung (B) y_1, y_2 gebildete Form μten Grades genügt einer linearen Differenzialgleichung $\mu + 1$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche in der Arbeit S. 129 als Differenzialgleichung (C) bezeichnet ist. Dieselbe ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung, welcher y^μ genügt, wo y ein beliebiges Integral der Differenzialgleichung (B) ist (S. 129—131).

Wird also die Differentialgleichung (B) nur durch algebraische Integrale befriedigt, so muss die Differenzialgleichung (C) für $\mu = N$, demnach, wenn nicht $N = 1$, d. h. schon der Differenzialgleichung (B) eine Wurzel einer rationalen Function genügt, *für einen der geradzahligen Werthe von μ die nicht die Zahl 12 übersteigen,* durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden (S. 131).

Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ die grösser sind als 2, so hat auch *umgekehrt* die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale (S. 131). Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden: Ist eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differenzialgleichung (B) ein algebraisches Integral, ein Satz, welcher S. 127—128 bewiesen ist.

Hat aber die Differenzialgleichung (C) zuerst für $\mu = 2$ eine Wurzel φ einer rationalen Function zum Integral, so ist $\varphi(z)^2$ eine *rationale Funktion* und

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\,\frac{d^2\log\varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Zahl λ. Ist nun

$$\lambda\int\frac{dz}{\varphi(z)}$$

gleich dem Logarithmus einer algebraischen Funktion, so sind die Integrale der Differenzialgleichung (B) algebraisch (S. 131). Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf die S. 117—118 gemachten Entwickelungen.

Hiermit ist die Untersuchung der Frage, wie die Differenzialgleichung (B) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, bis auf die Betrachtung von $\int\frac{dz}{\varphi(z)}$, die im letztangegebenen Falle nöthig wird, auf die in No. 1 dieser Notiz angeführte Aufgabe zurückgeführt, nämlich zu bestimmen, unter welchen Umständen eine lineare Differenzialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Funktion befriedigt wird, d. h. nach S. 102 zu untersuchen, ob ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zulässt.

Es wird (S. 132—134) nachgewiesen, dass bei der Anwendung dieser Methode die Differenzialgleichung (C) nicht aufgestellt zu werden braucht, dass man vielmehr ein derselben gleichbedeutendes sich unmittelbar darbietendes System von Differenzialgleichungen der Rechnung zu Grunde legen kann.

II. Methode.

Diese stützt sich auf Entwickelungen, welche der Verfasser im Bande 75 des Borchardt'schen Journals S. 208 sqq. in Bezug auf die Coefficienten der linearen homogenen Relationen gegeben hat, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten einer linearen Differenzialgleichung gehörigen Fundamentalsysteme derselben mit einander verbunden werden; Einwirkungen, durch welche diese Coefficienten aus den in den Coefficienten der Differenzialgleichung enthaltenen Constanten bestimmt werden.

Indem nun (S. 138—140) direct die Einwirkungen der verschiedenen Umläufe von z, als eben so vieler mit einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 ausgeführter linearer Substitutionen, auf eine aus y_1, y_2 gebildete Form untersucht werden, erhalten wir ein gewisses System von Gleichungen zwischen den Coefficienten jener linearen Relationen, den Coefficienten der Primform niedrigsten Grades, und den in P enthaltenen Constanten. Es lässt sich demnach bestimmen, wie diese Constanten beschaffen sein müssen, damit die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale besitze.

Der Verfasser bemerkt jedoch (S. 141), dass die erste Methode vor dieser den Vorzug besitze, die endgültige Entscheidung auf ein System *algebraischer linearer* Gleichungen zurückzuführen, während die zweite Methode die Untersuchung *transscendenter* Gleichungen erforderte. Indessen wo die Gesetze dieser transscendenten Funktionen sich einer ähnlichen Einfachheit erfreuen wie die Gauss'schen Π-Funktionen, könne diese Methode nicht ohne Vortheil angewendet werden.

Ist umgekehrt die Differenzialgleichung (B) *gegeben*, und soll entschieden werden, ob diese algebraische Integrale besitzt, so lässt die zweite Methode Vereinfachungen zu (S. S. 141—142), indem gelehrt wird eine Tabelle von ähnlicher Beschaffenheit aufzustellen, wie die auf S. 126, und die Relationen zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen auf dieselbe anzuwenden.

4.

Es ist in No. 2 dieser Notiz das Resultat erwähnt worden, dass die Zahl N nicht grösser als 12 sei. Dasselbe ist eine unmittelbare Folge von Entwickelungen, welche sich auf die Eigenschaften derjenigen algebraischen Funktionen, welche der Differenzialgleichung (B) genügen, und die Natur der binären Formen, welche aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 derselben überhaupt beziehen (S. 102—126). Die hauptsächlichen Elemente dieser Entwickelungen sind die folgenden:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differenzialgleichung (B) algebraisch, so ist jedes Integral derselben eine rationale Funktion von z und einem beliebigen anderen Integrale (S. 107).

Wenn ein algebraisches Integral y auf einem gewissen Wege in yj übergeht, wo j constant, so ist j eine primitive ganzzahlige $l$te Wurzel der Einheit, es ist l Divisor des Grades m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, und jedes Integral hat die Form

$$(\alpha' + \beta' c_1)y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l),$$

worin α', β' Constanten, $\psi(y^l)$ eine ganze rationale Funktion von y^l vom Grade $\frac{m}{l}-1$ mit in z rationalen Coefficienten bedeutet. Die Grösse c_1 ist ebenfalls constant, wenn $l > 2$ (S. 108).

Die Function

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ist ebenfalls ein Integral der Differenzialgleichung (B) (S. 108—109).

Ist $F(y)$ ein Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und

1) $$(\alpha) \quad F(y) = \beta' y^{l-1}\psi(y^l) \quad (\beta' \text{ constant}),$$

so sind die Glieder der Reihe

$$(\beta) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F(yj^{l-1})$$

nur um constante Factoren verschieden.

2) Ist $F(y)$ nicht der Form (α) und l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (β) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist $F(y)$ nicht der Form (α) und l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe

$$(\gamma) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right)$$

gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i) \quad \text{(S. 110—111).}$$

Der Grad m der irreductiblen algebraischen Gleicheng, welcher ein algebraisches Integral der Differenzialgleichung (B) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Man kann daher mit Recht m den zur Differenzialgleichung (B) gehörigen Grad nennen (S. 111).

Ist $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen algebraischen Gleichung $m$ten Grades, welcher das Integral y genügt, und $j, j_1, j_2, \ldots,$ die Zahlen, mit welchen irgend welche der Glieder dieses Systems multiplicirt die anderen Wurzeln derselben Gleichung reproduciren, so sind diese Zahlen Einheitswurzeln. Sie seien resp. $l$te, $l_1$te, $l_2$te, ..., primitive Wurzeln der der Einheit, und unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots, l$ die grösste, so ist l ein Multiplum von $l_1, l_2, \ldots,$ und es liefert das System:

$$y_i,\ y_ij,\ y_ij^2,\ \ldots,\ y_ij^{l-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (S. 111—113).

Die Zahl l wird der *Index* des reducirten Wurzelsystems genannt, es ist also das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems in den Index desselben gleich dem Grade der Gleichung (S. 113).

Von jeder Form des in No. 2 dieser Notiz mit Φ bezeichneten Complexes gilt der Satz, dass sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft enthält (S. 115).

Gehört eine Form dem Complexe Φ an, so gehört auch jede Covariante derselben dem Complexe Φ an (S. 106).

Die Hesse'sche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform (S. 116).

Die Linearfactoren einer Primform niedrigsten Grades bilden ein reducirtes Wurzelsystem mit kleinster Gliederanzahl N. Es wird der Index desselben mit L (S. 115) bezeichnet.

Es sei η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades $\Phi(y_1, y_2)$, ζ irgend ein Factor der Hesse'schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ derselben. Ist

$$(\delta) \qquad \zeta = \beta' \eta^{L-1} \psi(\eta^L),$$

wo β' constant und

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_1 \eta^L + \cdots + c_{(N-1)L} \cdot \eta^{(N-1)L},$$

so ist $N = 4$ (S. 119).

Ist kein ζ Factor der Form (δ), und $N > 2$, und setzt man $\lambda = \frac{L}{2}$ oder L, je nachdem L gerade oder ungerade, so ist λ Divisor von $2N-4$ (S. 121) und $\Psi(y_1, y_2)$ der Form

$$(\varepsilon) \quad \Psi(y_1, y_2) = C[\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} L_1^\lambda \cdot y_1^\lambda][\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_2^\lambda y_1^\lambda] \cdots [\beta_{\lambda'}^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \cdot \alpha_{\lambda'}^\lambda y_1^\lambda]$$

$\lambda' = \dfrac{2N-4}{\lambda}$ (S. 122).

Die Hesse'sche Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ der Hesse'schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2} \Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1, y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind (S. 122).

Die Zahl λ ist kleiner als 6 (S. 122).

Die Zahl N ist nicht grösser als 12 (S. 123).

Die Covarianten niedrigern als Nten Grades einer Primform niedrigsten Grades müssen identisch verschwinden (S. S. 98).

Mit Hülfe der Eigenschaften der Primformen niedrigsten Grades wird eine Tabelle für die möglichen Gestalten derselben hergeleitet (S. 123—126), aus welcher sich namentlich ergiebt, dass N von den die Zahl 12 nicht übersteigenden Werthen nur die geradzahligen annehmen kann.

5.

Zum Schluss noch einige besondere Resultate, welche zeigen, wie man in concreten Fällen aus den in der Arbeit entwickelten Principien einfache Mittel der Entscheidung gewinnen kann, ob die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale hat.

Sind die Integrale der Differenzialgleichung (B) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differenzialgleichungen (12) No. 4 der Arbeit in B. 66, und es müssen die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nach (B. 66 No. 6 II) rationale Zahlen sein (s. S. 104 der vorl. Arbeit). Ist dieses erfüllt, und irgend einer der Nenner dieser auf ihre kleinste Benennung gebrachten Zahlen grösser als 10, so besitzt die Differenzialgleichung (B) kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differenzialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird (S. S. 134—135).

Sind die Nenner derselben Zahlen sämmtlich von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, und wird die Differenzialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differenzialgleichung (B) entweder überhaupt kein algebraisches Integral oder die Wurzel einer rationalen Function (S. 135—136).

Sind sämmtliche Nenner gleich 2, ferner $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ die in algebraischem Sinne grössere der beiden Wurzeln $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$, $1 - \frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ der zum singulären Punkt a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich y_{i1} das zu $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ als Exponent gehörige Integral (s. B. 66 No. 5), und setzt man voraus, dass für alle singulären Punkte der Coefficient von $(z - a_i)^{-\mathfrak{z}_i - 1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{y_{i1}^2}$ nach steigenden Potenzen von $z - a_i$ verschwindet, so wird die Differenzialgleichung (B) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt (S. S. 137—138).

Heidelberg. L. Fuchs.